Questões sobre Poliedros

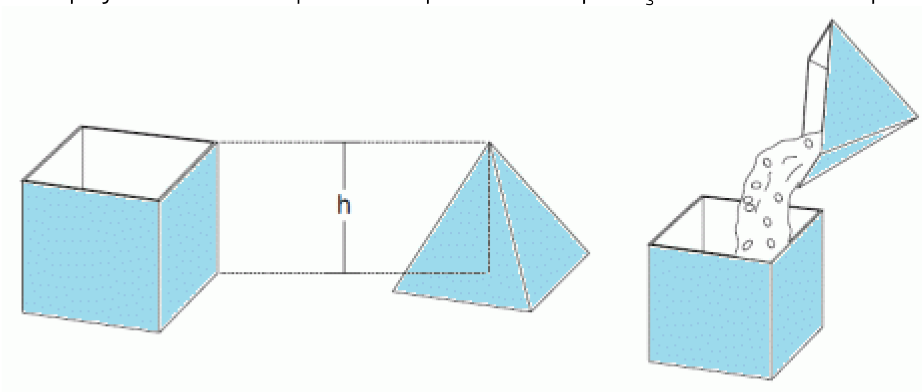
Sumário

Questões

1.1 Nível Fácil

Questão 1

Usando cartolina, um aluno construiu um prisma, sem uma das tampas (bases) e uma pirâmide, sem o fundo (base), de mesma base e mesma altura do prisma. Em seguida, encheu a pirâmide de areia e a despejou dentro do prisma. Repetiu essa operação até encher o prisma com areia.



Quantas vezes foram necessárias despejar o conteúdo da pirâmide no interior do prisma, para enchê-lo por completo?

Questão 2 - UNIFAP 2009 (Universidade Federal do Amapá)

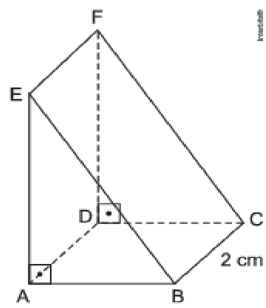
Um poliedro tem 7 faces, 7 vértices e 12 arestas. Desse modo, podemos inferir que esse poliedro pode ser:

(a) um prisma de base heptagonal.
(b) um prisma de base hexagonal.
(c) um prisma de base pentagonal.
(d) uma pirâmide de base hexagonal.
(e) uma pirâmide de base heptagonal.

Questão 3 - FEEVALE (Faculdade e Escola do Vale dos Sinos)

No sólido abaixo representado, sabe-se que as faces ABCD e BCFE são retângulos de áreas 6 cm^2 e 10 cm^2, respectivamente.
O volume desse sólido é de:

(a) 8 cm^3
(b) 10 cm^3
(c) 12 cm^3
(d) 16 cm^3
(e) 24 cm^3



Questão 4 - ENEM 2014 (Exame Nacional do Ensino Médio)

Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes peidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura. A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{7}{8}$ (c) $\frac{8}{7}$ (d) $\frac{8}{9}$ (e) $\frac{9}{8}$

Questão 5 - UEPB 2013 (Universidade Estadual da Paraíba)

Um reservatório em forma de cubo, cuja diagonal mede $2\sqrt{3}$ m, tem capacidade igual a

(a) 1000 ℓ (b) 2000 ℓ (c) 4000 ℓ (d) 8000 ℓ (e) 16000 ℓ

Questão 6

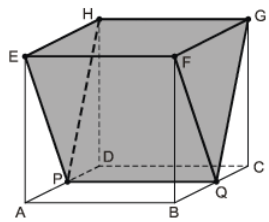
Gabriel e Douglas estavam conversando em uma aula de Matemática quando Gabriel afirmou: "O menor número de lados que um polígono pode ter é três, então o menor número de faces que um prisma pode ter é quatro".
Ao escutá-lo, Douglas discordou, dizendo que "com quatro faces não se faz um prisma".

(a) Quem está correto? Justifique minuciosamente sua resposta.

(b) Qual é menor número de arestas e de vértices que um prisma pode ter?

Questão 7 - UFRGS 2013 (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

Um sólido geométrico foi construído dentro de um cubo de aresta 8, de maneira que dois de seus vértice, P e Q, sejam respectivamente os pontos médios de AD e BC, e os vértices da face superior desse sólido coincidam com os vértices da face superior desse cubo, como indicado na figura ao lado. Nessas condições, o volume desse sólido é



(a) 64 (b) 128 (c) 256 (d) 512 (e) 1024

Questão 8 - UFPE 2008 (Universidade Federal de Pernambuco)

Considere um tronco de pirâmide de 4 dm de altura e cujas áreas das bases são iguais a 36 dm² e 144 dm². Calcule seu volume.

Questão 9 - UFTM 2012 (Universidade Federal do Triângulo Mineiro)

A figura 1 representa um prisma após a secção do paralelepípedo reto-retângulo ADFCGJLI representada na figura 2.

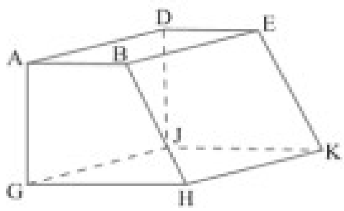


figura 1

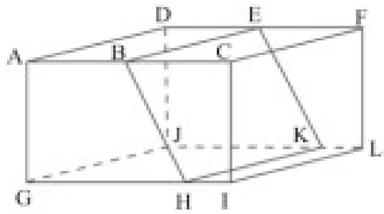


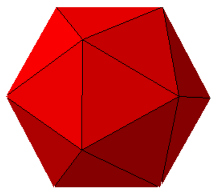
figura 2

Sendo que AB = BC = DE = EF e 4HI = JL = 2JG = 2AG = x, o volume do prisma representado na figura 1 é

(a) $\frac{5x^3}{32}$ (b) $\frac{3x^3}{16}$ (c) $\frac{3x^3}{5}$ (d) $\frac{5x^3}{8}$ (e) $\frac{3x^3}{4}$

Questão 10 - UVA 2013 (Universidade Veiga de Almeida)

Acerca do poliedro ao lado, são feitas as seguintes afirmações:



(01) É um poliedro de Platão, mas não é regular.
(02) É um poliedro euleriano.
(04) Suas faces são polígonos regulares e congruentes.
(08) É chamado de dodecaedro regular.

Seja C o valor da soma das alternativas corretas. Então, é correto afirmar que C é:

(a) Um número cubo perfeito
(b) Um número perfeito
(c) Um número quadrado perfeito
(d) Um número ímpar
(e) Um número primo.

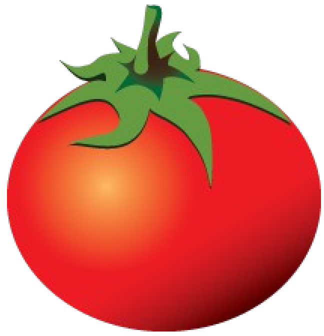
Questão 11 - ITA 1975 (Instituto Tecnológico de Aeronáutica)

Num poliedro convexo, o número de faces é 6 e o número de vértices é 8. Então, o número de arestas desse poliedro é:

(a) 12 **(b)** 18 **(c)** 28 **(d)** 30 **(e)** 32

Questão 12

Tomatildo é um alegre feirante. Ele adora vender tomates. Mas para transportá-los para sua quitanda, ele necessita guardá-los em caixas. Então, utilizando-se de 7 caixas iguais na forma de paralelepípedos reto-retângulos, de dimensões 58 cm, 37 cm e 43 cm, ele conseguiu preenchê-los totalmente com seus tomates. Tomatildo passou a vender cada tomate a R$ 0,78 a unidade. Supondo que os tomates tenham o mesmo volume de 864 cm³, qual será o lucro obtido após a venda de todos os tomates?



(a) R$ 449, 50 (b) R$ 496, 59 (c) R$ 512, 32 (d) R$ 584,22 (e) R$ 780, 86

Questão 13 - FGV (Fundação Getúlio Vargas)

Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(a) Um dodecaedro tem duas faces.
(b) Uma face é a intersecção de duas arestas.
(c) Um pentadecaedro tem 15 arestas.
(d) Existe poliedro que tem quatro faces.
(e) Todo poliedro tem no mínimo 12 arestas.

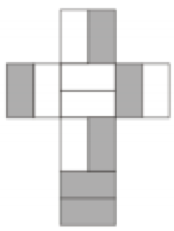
Questão 14 - UFOP (Universidade Federal de Ouro Preto)

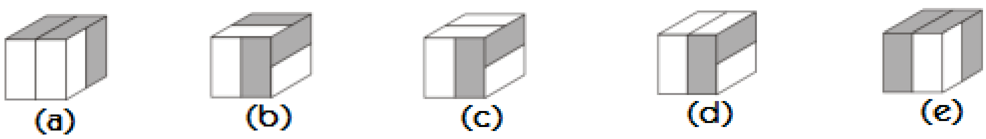
Maíra adora brincar na piscina da casa de Jean. A piscina tem 3 m de largura por 4 m de comprimento. A parte mais rasa tem 0,5 m de profundidade e a parte funda, 1 m de profundidade. O piso da piscina é o usual: uma rampa plana. A quantidade de litros de água necessária para enchê-la é

(a) 6000 (b) 8000 (c) 9000 (d) 10000 (e) 12000

Questão 15 - OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas)

Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura ao lado. Qual das figuras abaixo representa o cubo construído por Guilherme?



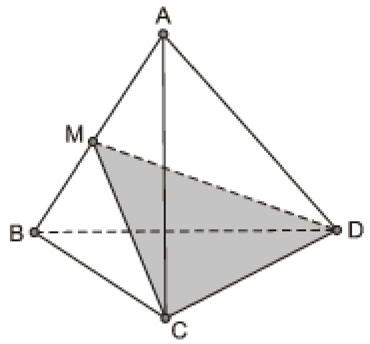


Questão 16 - UFMA (Universidade Federal do Maranhão)

Uma pirâmide e um prisma de bases quadradas têm áreas de base e volume iguais. Se a altura da pirâmide é de 6 cm e a medida do lado da base é 7 cm, determine a área total do prisma.

Questão 17 - UPF 2014 (Universidade de Passo Fundo)

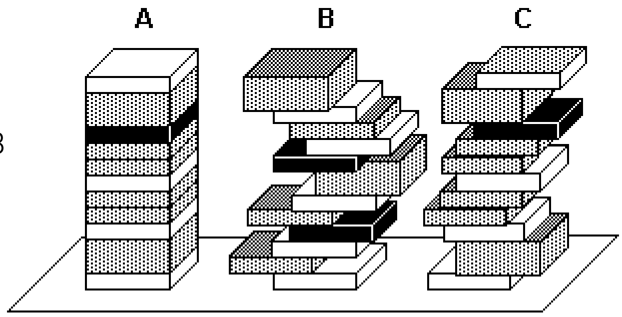
As quatro faces do tetraedro ABCD são triângulos equiláteros. M é o ponto médio da aresta AB. O triângulo MCD formado é:



(a) escaleno
(b) retângulo
(c) equilátero
(d) obtusângulo
(e) estritamente isósceles

Questão 18 - UFSM 2001 (Universidade Federal de Santa Maria)

Três crianças estavam brincando na biblioteca da escola e resolveram fazer pilhas de mesma altura, com livros, conforme a figura. A mais organizada fez a pilha A, e as outras duas fizeram as pilhas B e C. Considerando-se que todos os livros têm a mesma área de capa e que as pilhas têm a mesma altura, pode-se afirmar que



(a) o volume da pilha A é maior do que o volume da pilha C.

(b) os volumes das pilhas B e C são iguais e maiores do que o volume da pilha A.

(c) o volume da pilha A é menor do que o volume da pilha B que é menor do que o volume da pilha C.

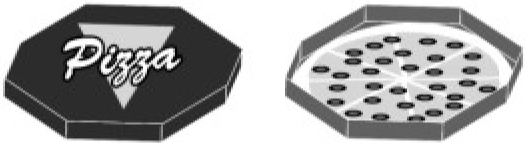
(d) os volumes das três pilhas são iguais.

(e) não existem dados suficientes no problema para decidir sobre os volumes e compará-los.

1.2 Nível Médio

Questão 1 – UERJ 2010 (Universidade Estadual do Rio de Janeiro)

Uma embalagem em forma de prisma octogonal regular contém uma pizza circular que tangencia as faces do prisma.



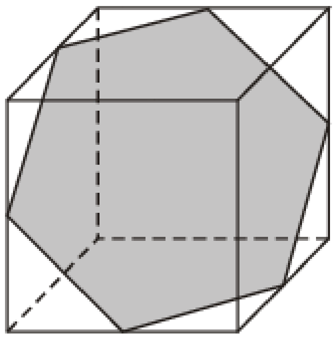
Desprezando a espessura da pizza e do material usado na embalagem, a razão entre a medida do raio da pizza e a medida da aresta da base do prisma é igual a:

(a) $2\sqrt{2}$ (b) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ (d) $2(\sqrt{2}-1)$

Questão 2 – UFRGS 2014 (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

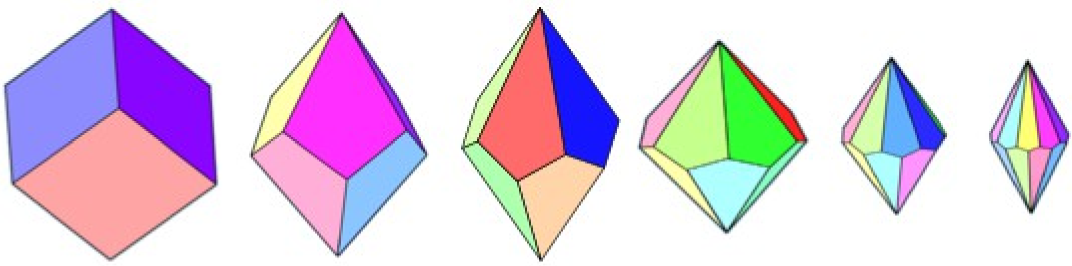
Os vértices do hexágono sombreado, na figura ao lado, são pontos médios das arestas de um cubo. Se o volume do cubo é 216, o perímetro do hexágono é

(a) $3\sqrt{2}$ (b) $6\sqrt{2}$ (c) $9\sqrt{2}$
(d) $12\sqrt{2}$ (e) $18\sqrt{2}$

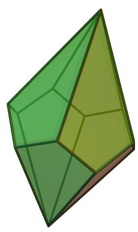


Questão 3

Um trapezoedro é um poliedro com faces em forma de deltoide. Seu formato é bastante similar a um balão de festa junina, como pode ser visto abaixo:

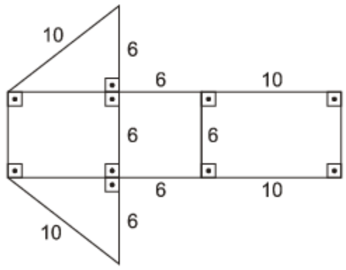


O tipo de trapezoedro depende da quantidade de deltoides que o formam. Em geral, se ele tem 2n deltoides ele é chamado de trapezoedro n-gonal. Por exemplo, O trapezoedro verde ao lado é chamado de pentagonal porque contém 10 deltoides. Prove que todo trapezoedro é convexo.



Questão 4 – UFRGS 2014 (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

Na figura abaixo, encontra-se representada a planificação de um sólido de base quadrada cujas medidas estão indicadas.



O volume desse sólido é:

(a) 144 (b) 180 (c) 216 (d) 288 (e) 360

Questão 5 – UFG 2013 (Universidade Federal de Goiás)

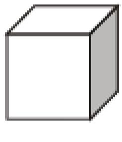
Um joalheiro produzirá um ornamento para um pingente a partir de uma pedra precisa, originalmente em forma de um cubo. Para isso, ele retirará de cada vértice do cubo um tetraedro cujos vértices são os vértices do cubo e os pontos médios das arestas que concorrem nesse vértice. Os tetraedros serão descartados. Considerando-se as condições apresentadas, calcule:

(a) O número de faces do poliedro que constitui o ornamento.

(b) A fração do volume do cubo original que constitui cada tetraedro retirado.

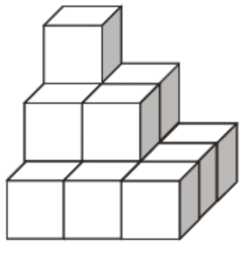
Questão 6 – UPE 2013 (Universidade de Pernambuco)

Para pintar completamente o cubo representado abaixo, são necessários 300 mililitros de tinta.



Mantendo o mesmo rendimento de pintura, quantos litros seriam necessários para pintar completamente a peça representada abaixo, formada por 14 cubos, sabendo-se que não há cubos escondidos?

(a) 0,7 litro
(b) 1,9 litros
(c) 2,1 litros
(d) 3,0 litros
(e) 4,2 litros



Questão 7 – UNEB 2014 (Universidade do Estado da Bahia)

"A pele é o maior órgão de seu corpo, com uma superfície de até 2 m². Ela tem duas camadas principais: a epiderme, externa, e a derme, interna. "

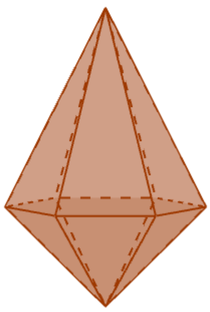
(BREWER. 2013, p. 72).

De acordo com o texto, a superfície máxima coberta pela pele humana é equivalente a de um cubo cuja diagonal, em m, é igual a

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) 1

Questão 8

Punching Ball é o nome dado a um equipamento muito utilizado por boxeadores para treinamentos. Carlos pratica boxe e necessita de uma *punching ball* com modelo semelhante aos que estão exemplificados ao lado. Como ele irá fixá-la no teto d e sua garagem por meio de um suporte flexível, é necessário saber seu volume. Para isso, Carlos fez um esboço da *punching ball* utilizando duas pirâmides de base hexagonal regular, como mostrado abaixo, obtendo um sólido.



(a) Determine a quantidade de faces, vértices e arestas e diga um possível nome para este sólido.

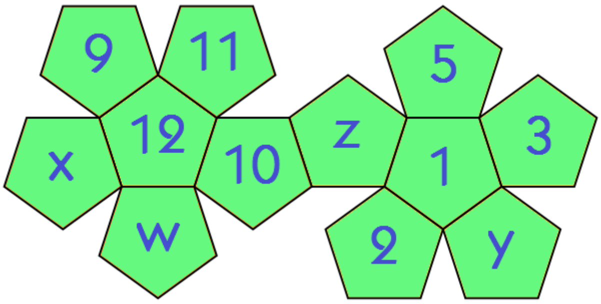
(b) Sabendo que o apótema do hexágono que serve como base para as pirâmides é de $6\sqrt{3}$ cm, que a altura da pirâmide de cima é o dobro da altura da pirâmide de baixo e que a área superficial total dó sólido é de 1404 cm², determine o valor aproximado do volume da *punching ball* calculado por Carlos.

Questão 9

Dados com formatos de poliedros, como os mostrados abaixo, são utilizados nos mais diversos tipos de jogos de tabuleiro.

(a) Determine o número de faces, vértices e arestas de cada poliedro representado acima.

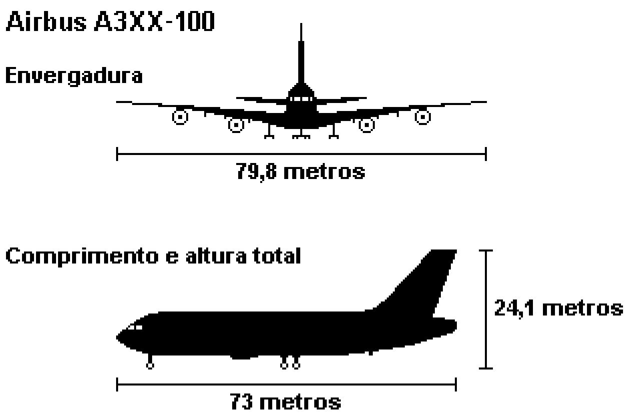
(b) Tem-se abaixo a planificação de um dado dodecaédrico com os números de 1 a 12 em suas respectivas faces. Por um defeito na fabricação do mesmo, algumas faces ficaram sem seus números, representados abaixo pelas letras x, y, z e w. Sabendo que a soma dos números de faces opostas é sempre igual, determine os valores de x, y, z e w.



(c) Supondo que tenhamos um dado tetraédrico com os números de 1 a 4 em cada face, um dado normal com números de 1 a 6, um dado octaédrico com números de 1 a 8, um dado dodecaédrico com números de 1 a 12 e um dado icosaédrico com números de 1 a 20, se sortearmos um número de cada dado, nessa ordem, qual a probabilidade deles formarem uma progressão aritmética?

Questão 10 – UERJ 2001 (Universidade Estadual do Rio de Janeiro)

Na construção de um hangar, com a forma de um paralelepípedo retângulo, que possa abrigar um "Airbus", foram consideradas as medidas apresentadas abaixo.



(Adaptado de "Veja", 14/06/2000.)

Calcule o volume mínimo desse hangar.

Questão 11

Seja um prisma regular de base hexagonal com lados de medida l e altura de medida h. Sabendo que o volume do prisma é $24\sqrt{18}$, determine todos os valores inteiros de l tais que existe uma constante k de modo que $A_{lateral} = k \cdot A_{base}$ e $k > l$.

Questão 12

A raiz quadrada da razão entre as quantidades de diagonais espaciais de um icosaedro e um dodecaedro, sendo estes Sólidos Platônicos, pode ser expressa na forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros. Determine $a + b$.

1.3 Nível Difícil

Questão 1 – OCM 2000 (Olimpíada Cearense de Matemática)

Se um poliedro convexo tem 6 vértices e 12 arestas, prove que toda face é um triângulo.

Questão 2 – ITA 2014 (Instituto Tecnológico de Aeronáutica)

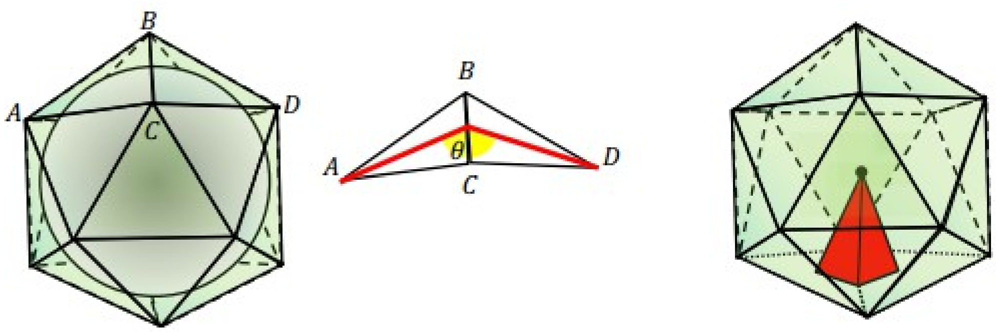
Uma pirâmide de altura h = 1 cm e volume V = 50 cm³ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se n – 3 diagonais que o decompõem em n – 2 triângulos cujas áreas $S_i, i=1,2,\ldots n-2$, constituem uma progressão aritmética na qual $S_3=\frac{3}{2}cm^2$ e $S_6=3\,cm^2$. Então n é igual a:

(a) 20 **(b)** 22 **(c)** 24 **(d)** 26 **(e)** 28

Questão 3 – OPM 2013 (Olimpíada Paulista de Matemática) (Adaptado)

Os sólidos de Platão têm faces com mesmas quantidades de arestas e, além disso, de cada vértice sai a mesma quantidade de arestas. Se todas as arestas têm a mesma medida, o sólido de Platão é regular. Pode-se provar que há cinco sólidos de Platão: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

Você já deve conhecer bem os dois primeiros sólidos, e quem sabe o terceiro. Nesse problema, daremos uma atenção especial ao icosaedro.
Nesta questão, calcularemos o raio da esfera inscrita no icosaedro regular, que é o sólido de Platão com 20 faces triangulares.



(a) Sendo θ o ângulo diédrico entre as faces ABC e BCD do icosaedro regular, calcule cos θ.

(b) Considere o quadrilátero destacado na figura da direita, que tem como vértices o centro do icosaedro, dois centros de faces adjacentes e o ponto médio de uma das arestas. Sendo ℓ a medida da aresta do icosaedro, calcule o raio da esfera inscrita no icosaedro.

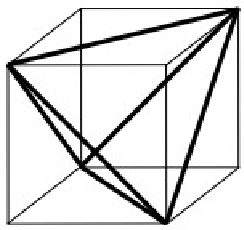
Você pode querer utilizar os seguintes dados:

☻ A diagonal de um pentágono regular de lado x é $x \cdot (\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

☻ $tg(\frac{\theta}{2}) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta+1}}$.

Questão 4 – OCAXM 2002 (Olimpíada Capixaba de Matemática 2002)

A partir da figura abaixo calcule o volume de um tetraedro de aresta a.



Questão 5 – OBM 1992 (Olimpíada Brasileira de Matemática 1992)

Um dado é um sólido com a forma de um poliedro convexo com um número impresso em cada face de tal forma que se forem apagados todos os números as faces se tornam i distinguíveis. Diga para quais valores de n é possível construir um dado de n faces com a propriedade de que para cada face há sempre uma outra face paralela.

Questão 6

Se a altura de uma pirâmide regular de base dodecagonal for duplicada e o lado de sua base reduzido à metade, qual a diminuição percentual no volume da pirâmide?

Questão 7 – OBM 1990 (Olimpíada Brasileira de Matemática)

Dado um poliedro convexo com um número ímpar de faces, mostre que existe pelo menos uma face com um número par de lados.

Questão 8 – UFPel (Universidade Federal de Pelotas)

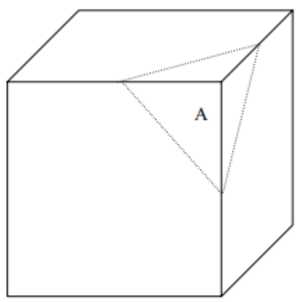
No país do México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema da armazenagem da pós-colheita de grãos com um tipo de silo em forma de uma bola colocado sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais.

Com base no texto, é correto afirmar que esse silo tem:

(a) 90 arestas e 60 vértices.
(b) 86 arestas e 56 vértices.
(c) 90 arestas e 56 vértices.
(d) 86 arestas e 60 vértices.
(e) 110 arestas e 60 vértices.

Questão 9 – IME 2008 (Instituto Militar de Engenharia)

Um plano corta um cubo com aresta de comprimento 1 passando pelo ponto médio de três arestas concorrentes no vértice A e formando uma pirâmide, conforme a figura a seguir. Este processo é repetido para todos os vértices. As pirâmides obtidas são agrupadas formando um octaedro cuja área da superfície externa é igual a:



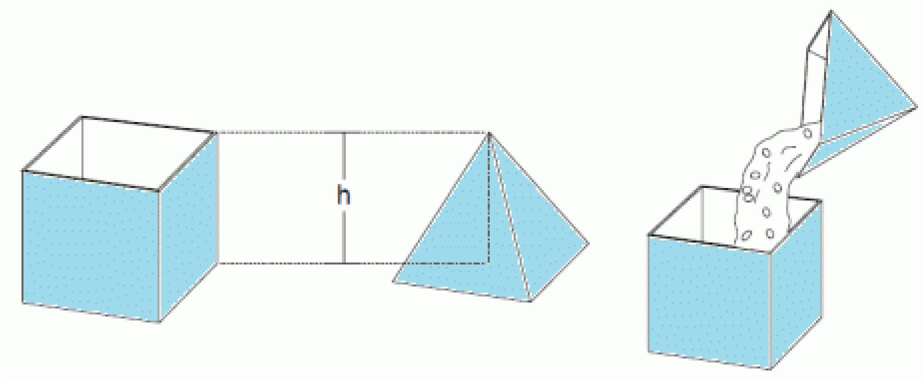
(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **(b)** $\sqrt{3}$ **(c)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **(d)** 2 **(e)** 1

Soluções das Questões

2.1 Nível Fácil

Questão 1

Usando cartolina, um aluno construiu um prisma, sem uma das tampas (bases) e uma pirâmide, sem o fundo (base), de mesma base e mesma altura do prisma. Em seguida, encheu a pirâmide de areia e a despejou dentro do prisma. Repetiu essa operação até encher o prisma com areia.



Quantas vezes foram necessárias despejar o conteúdo da pirâmide no interior do prisma, para enchê-lo por completo?

Solução

Como o prisma e a pirâmide possuem bases iguais, é óbvio que suas áreas também serão iguais. Dessa forma, podemos calcular o volume de cada um dos dois sólidos:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h$$

$$V_{pirâmide} = \frac{A_{base} \cdot h}{3}$$

Vê-se que o volume do prisma é o triplo do volume da pirâmide.
Logo, para encher o prisma por completo, foi necessário despejar o conteúdo da pirâmide 3 vezes.

Questão 2 - UNIFAP 2009 (Universidade Federal do Amapá)

Um poliedro tem 7 faces, 7 vértices e 12 arestas. Desse modo, podemos inferir que esse poliedro pode ser:

(a) um prisma de base heptagonal.
(b) um prisma de base hexagonal.
(c) um prisma de base pentagonal.
(d) uma pirâmide de base hexagonal.
(e) uma pirâmide de base heptagonal.

Solução

Esse poliedro claramente deve ser o citado entre as alternativas (c) e (d), pois os demais possuem uma quantidade diferente de 7 faces. Mas veja que o prisma de base pentagonal citado deve ter 10 arestas apenas. Assim, segue que esse poliedro pode ser uma pirâmide de base hexagonal. Abaixo, temos uma tabela com a quantidade de vértices, arestas e faces dos poliedros das alternativas:

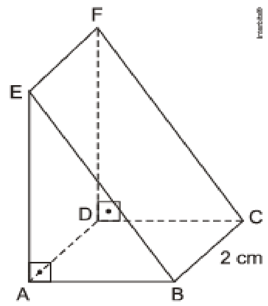
Alternativa	Poliedro	Vértices	Arestas	Faces
(a)	Prisma de base heptagonal	14	21	9
(b)	Prisma de base hexagonal	12	18	8
(c)	Prisma de base pentagonal	10	15	7
(d)	Pirâmide de base hexagonal	7	12	7
(e)	Pirâmide de base heptagonal	8	14	8

A alternativa correta é a (d).

Questão 3 - FEEVALE (Faculdade e Escola do Vale dos Sinos)

No sólido abaixo representado, sabe-se que as faces ABCD e BCFE são retângulos de áreas 6 cm² e 10 cm², respectivamente.
O volume desse sólido é de:

(a) 8 cm³
(b) 10 cm³
(c) 12 cm³
(d) 16 cm³
(e) 24 cm³



Solução

A área de ABCD é dada por $AB \cdot BC$. Daí temos $2\mathrm{AB}=6 \Leftrightarrow AB=3$. Já a área de BCFE é dada por $CB \cdot EB$. Então $2\mathrm{EB}=10 \Leftrightarrow EB=5$. Aplicando o Teorema de Pitágoras no triângulo AEB: $(EA)^2+(AB)^2=(EB)^2 \Leftrightarrow EA^2+3^2=5^2 \Leftrightarrow EA=\sqrt{5^2-3^2} \Leftrightarrow EA=4$.
O volume desse sólido (que é classificado como um prisma) é dado por $V=AB \cdot BC \cdot EA \Rightarrow V=3 \cdot 2 \cdot 4 \Rightarrow V=24\,cm^3$.

A resposta é a alternativa (e).

Questão 4 - ENEM 2014 (Exame Nacional do Ensino Médio)

Um carpinteiro fabrica portas retangulares maciças, feitas de um mesmo material. Por ter recebido de seus clientes peidos de portas mais altas, aumentou sua altura em $\frac{1}{8}$, preservando suas espessuras. A fim de manter o custo com o material de cada porta, precisou reduzir a largura. A razão entre a largura da nova porta e a largura da porta anterior é

(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{7}{8}$ (c) $\frac{8}{7}$ (d) $\frac{8}{9}$ (e) $\frac{9}{8}$

Solução

Seja V_0 o volume inicial da porta e V_1 o volume após alterar a altura da porta. Temos $V_0 = h \cdot l \cdot e$, em que h é a altura, l é a largura e e a espessura. Aumentando a altura em $\frac{1}{8}$, temos $V_1 = (h + \frac{h}{8}) \cdot l \cdot e \Rightarrow V_1 = \frac{9}{8} \cdot h \cdot l \cdot e$.

Seja l_1 a largura final. Para preservar o volume, este deve se manter, ou seja, $V_0 = V_1$. Daí, $h \cdot l_1 \cdot e = \frac{9}{8} \cdot h \cdot l \cdot e \Rightarrow l_1 = \frac{9}{8} \cdot l$.

A razão pedida é $\frac{l_1}{l} = \frac{\frac{9}{8} \cdot l}{l} = \frac{9}{8}$.

A resposta é a alternativa (e).

Questão 5 - UEPB 2013 (Universidade Estadual da Paraíba)

Um reservatório em forma de cubo, cuja diagonal mede $2\sqrt{3}$ m, tem capacidade igual a

(a) 1000 ℓ (b) 2000 ℓ (c) 4000 ℓ (d) 8000 ℓ (e) 16000 ℓ

Solução

A medida da diagonal do cubo é dada por $l\sqrt{3}$. Segue de imediato que l = 2 m. O volume de um cubo de lado l é dado por $V = l^3$. Daí, obtemos $V = 2^3 \Rightarrow V = 8\,m^3$.
Como 8 m³ = 8000 ℓ, segue que a alternativa correta é a (d).

Questão 6

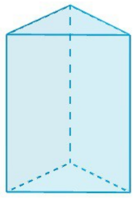
Gabriel e Douglas estavam conversando em uma aula de Matemática quando Gabriel afirmou:
"O menor número de lados que um polígono pode ter é três, então o menor número de faces que um prisma pode ter é quatro".
Ao escutá-lo, Douglas discordou, dizendo que "com quatro faces não se faz um prisma".

(a) Quem está correto? Justifique minuciosamente sua resposta.

(b) Qual é menor número de arestas e de vértices que um prisma pode ter?

Solução

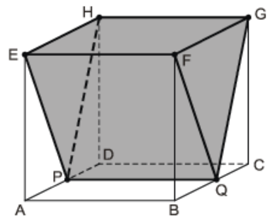
(a) Douglas está correto. O prisma com menor quantidade de faces é o de base triangular, e este tem no total 5 faces, como mostrado abaixo. Logo, é impossível haver um prisma com 4 faces.



(b) Se o prisma do item (a) é o que tem a menor quantidade de faces, ele também conterá a menor quantidade de arestas e vértices para um prisma.
Portanto, um prisma deve ter no mínimo 9 arestas e 6 vértices.

Questão 7 - UFRGS 2013 (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

Um sólido geométrico foi construído dentro de um cubo de aresta 8, de maneira que dois de seus vértice, P e Q, sejam respectivamente os pontos médios de AD e BC, e os vértices da face superior desse sólido coincidam com os vértices da face superior desse cubo, como indicado na figura ao lado. Nessas condições, o volume desse sólido é



(a) 64 **(b)** 128 **(c)** 256 **(d)** 512 **(e)** 1024

Solução

A área de cada quadrado que compõe esse cubo é $8^2 = 64$. Como P e Q são pontos médios, segue $A_{EHP}=\frac{A_{AEHD}}{2}$ e $A_{FGQ}=\frac{A_{BFGC}}{2}$. Como $A_{AEHD}=A_{BFGC}=64,$ ficamos com $A_{EHP}=A_{FGQ}=\frac{64}{2}=32.$ O volume do sólido é $V=A_{EHP}\cdot HG \Rightarrow V=32\cdot 8 \Rightarrow V=256.$
A alternativa (c) é a correta.

Questão 8 - UFPE 2008 (Universidade Federal de Pernambuco)

Considere um tronco de pirâmide de 4 dm de altura e cujas áreas das bases são iguais a 36 dm² e 144 dm². Calcule seu volume.

Solução

O volume do tronco de um prisma de bases A_B e A_b e medida de altura h é:

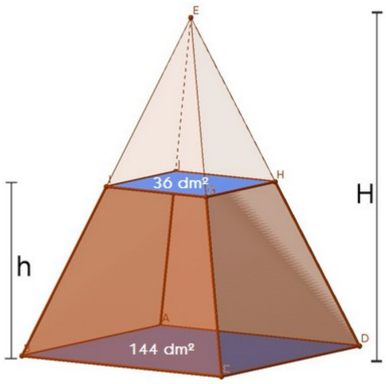
$$V=\frac{h\cdot\left(A_B+\sqrt{A_B\cdot A_b}+A_b\right)}{3}$$

Dos dados do enunciado, temos:

$$V=\frac{4\cdot\left(144+\sqrt{144\cdot 36}+36\right)}{3}\Rightarrow V=\frac{4\cdot\left(144+72+36\right)}{3}\Rightarrow V=\frac{4\cdot 252}{3}\Rightarrow V=336\,dm^3.$$

► **Solução alternativa**

Considere sem perda de generalidade que a pirâmide que originou esse tronco seja equivalente a abaixo representada, em que h = 4 dm.



Assim, o volume do tronco será a diferença entre o volume da pirâmide maior e a pirâmide menor, ou seja, $V_{tronco}=V_{maior}-V_{menor}$ A altura da pirâmide menor é dada por $H-h$. Por semelhança, temos $\sqrt{\frac{36}{144}}=\frac{H-4}{H}\Rightarrow H=2\mathrm{H}-8\Rightarrow H=8.$ Então,

$$V_{tronco}=\frac{A_{base}\cdot H}{3}-\frac{A_{base}\cdot(H-h)}{3}\Rightarrow V_{tronco}=\frac{144\cdot 8}{3}-\frac{36\cdot(8-4)}{3}\Rightarrow V_{tronco}=384-48\Rightarrow V_{tronco}=336\,dm^3.$$

Questão 9 - UFTM 2012 (Universidade Federal do Triângulo Mineiro)

A figura 1 representa um prisma após a secção do paralelepípedo reto-retângulo ADFCGJLI representada na figura 2.

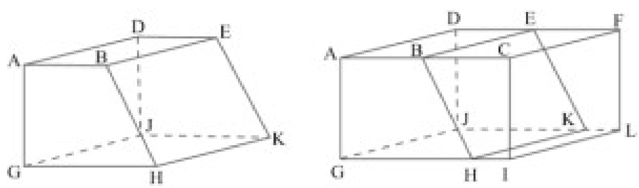


figura 1 figura 2

Sendo que AB = BC = DE = EF e 4HI = JL = 2JG = 2AG = x, o volume do prisma representado na figura 1 é

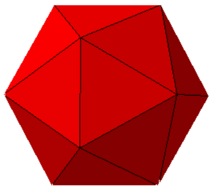
(a) $\frac{5x^3}{32}$ (b) $\frac{3x^3}{16}$ (c) $\frac{3x^3}{5}$ (d) $\frac{5x^3}{8}$ (e) $\frac{3x^3}{4}$

Solução

O volume do prisma será dado por $V=(GH \cdot JG) \cdot AG.$ Do enunciado, temos $JG=\frac{x}{2}$, $GH=3\text{HI}=\frac{3\text{x}}{4}$ e $AG=\frac{x}{2}$. Assim, $V=(\frac{3\text{x}}{4}) \cdot (\frac{x}{2}) \cdot (\frac{x}{2}) \Rightarrow V=\frac{3\text{x}^3}{16}$.
A alternativa correta é a (b).

Questão 10 - UVA 2013 (Universidade Veiga de Almeida)

Acerca do poliedro ao lado, são feitas as seguintes afirmações:



(01) É um poliedro de Platão, mas não é regular.
(02) É um poliedro euleriano.
(04) Suas faces são polígonos regulares e congruentes.
(08) É chamado de dodecaedro regular.

Seja C o valor da soma das alternativas corretas. Então, é correto afirmar que C é:

(a) Um número cubo perfeito
(b) Um número perfeito
(c) Um número quadrado perfeito
(d) Um número ímpar
(e) Um número primo

Solução

Analisando os itens:
(01) Falsa. O poliedro mostrado é um poliedro de Platão, mas todo poliedro de Platão é regular.
(02) Verdadeira. O poliedro satisfaz a Relação de Euler, pois tem 30 arestas, 12 vértices e 20 faces, e 12 – 30 + 20 = 2.
(04) Verdadeira. Por ser um poliedro regular, como foi dito, ele é composto por polígonos regulares (triângulos equiláteros) e congruentes.
(08) Falsa. O nome desse poliedro é icosaedro regular.
Assim, temos $C=2+4 \Rightarrow C=6$. Como 6 é um número perfeito, segue que a alternativa correta é a (b).

Questão 11 - ITA 1975 (Instituto Tecnológico de Aeronáutica)

Num poliedro convexo, o número de faces é 6 e o número de vértices é 8. Então, o número de arestas desse poliedro é:

(a) 12 **(b)** 18 **(c)** 28 **(d)** 30 **(e)** 32

Solução

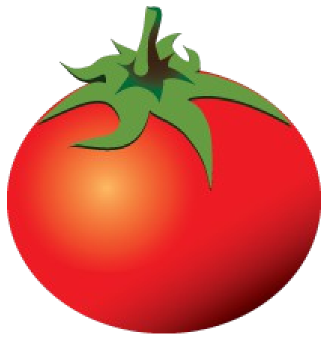
Aplicando o Teorema de Euler, segue de forma imediata que

$$V - A + F = 2 \Rightarrow 8 - A + 6 = 2 \Rightarrow A = 12.$$

Assim, a alternativa correta é a (a).

Questão 12

Tomatildo é um alegre feirante. Ele adora vender tomates. Mas para transportá-los para sua quitanda, ele necessita guardá-los em caixas. Então, utilizando-se de 7 caixas iguais na forma de paralelepípedos reto-retângulos, de dimensões 58 cm, 37 cm e 43 cm, ele conseguiu preenchê-los totalmente com seus tomates. Tomatildo passou a vender cada tomate a R$ 0,78 a unidade. Supondo que os tomates tenham o mesmo volume de 864 cm³, qual será o lucro obtido após a venda de todos os tomates?



(a) R$ 449, 50 **(b)** R$ 496, 59 **(c)** R$ 512, 32 **(d)** R$ 584,22 **(e)** R$ 780, 86

Solução

Por se tratar de um prisma (o paralelepípedo é um prisma cujas faces são paralelogramos), segue que seu volume será $V_{caixa} = 58 \cdot 37 \cdot 43 = 92728\, cm^3$. Como cada tomate tem 864 cm³ de volume, em cada caixa caberão $\frac{92728}{864} = 107{,}32407 \simeq 107$ tomates. Como há 7 caixas, temos no total $7 \cdot 107 = 749$ tomates. Como cada um será vendido a R$ 0,78, teremos no total um lucro de $749 \cdot 0{,}78 = 584{,}22$.
A resposta é a alternativa (d).

Questão 13 - FGV (Fundação Getúlio Vargas)

Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

(a) Um dodecaedro tem duas faces.
(b) Uma face é a intersecção de duas arestas.
(c) Um pentadecaedro tem 15 arestas.
(d) Existe poliedro que tem quatro faces.
(e) Todo poliedro tem no mínimo 12 arestas.

Solução

Vamos analisar cada afirmação separadamente:
(a) A afirmação é falsa, pois um dodecaedro tem 12 faces.
(b) A afirmação é falsa, pois a intersecção de duas (ou mais) arestas é um vértice.
(c) A afirmação é falsa, pois um pentadecaedro tem 15 faces.
(d) A afirmação é verdadeira. Podemos citar como exemplo o tetraedro regular ou qualquer pirâmide de base triangular.
(e) A afirmação é falsa, pois existem poliedros com menos de 12 arestas.
A resposta é a alternativa (d).

Questão 14 - UFOP (Universidade Federal de Ouro Preto)

Maíra adora brincar na piscina da casa de Jean. A piscina tem 3 m de largura por 4 m de comprimento. A parte mais rasa tem 0,5 m de profundidade e a parte funda, 1 m de profundidade. O piso da piscina é o usual: uma rampa plana. A quantidade de litros de água necessária para enchê-la é

(a) 6000 **(b)** 8000 **(c)** 9000 **(d)** 10000 **(e)** 12000

Solução

A piscina pode ser dividida em um prisma de dimensões 3m, 4m e 0,5m e uma pirâmide quadrangular de dimensões 0,5m, 3m e 4m. Calculando o volume de cada um:

$$V_{prisma} = 3 \cdot 4 \cdot 0{,}5 \Rightarrow V_{prisma} = 6\, m^3. \qquad V_{pirâmide} = \frac{0{,}5 \cdot 3 \cdot 4}{3} \Rightarrow V_{piramide} = 2\, m^3$$

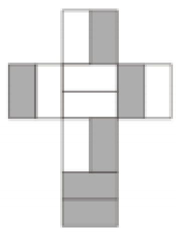
O volume da piscina é dado pela soma dos volumes do prisma e da pirâmide:

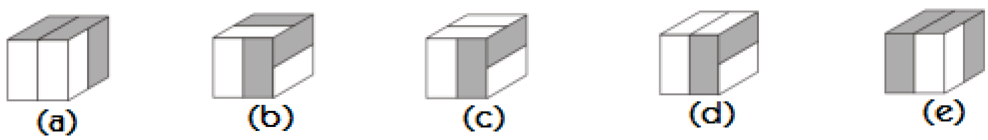
$$V_{piscina} = V_{prisma} + V_{pirâmide} \Rightarrow V_{piscina} = 6 + 2 \Rightarrow V_{piscina} = 8\, m^3.$$

Como 8 m³ = 8000 ℓ, segue que é necessário 8000 litros de água para encher a piscina. Alternativa (b).

Questão 15 - OBMEP (Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas)

Para montar um cubo, Guilherme recortou um pedaço de cartolina branca e pintou de cinza algumas partes, como na figura ao lado. Qual das figuras abaixo representa o cubo construído por Guilherme?





Solução

Ao montar o cubo, a face branca e a face cinza ficam opostas; logo as alternativas (a) e (b) estão excluídas.
As alternativas (d) e (e) estão excluídas pois no cubo não podem aparecer um retângulo branco e outro cinza com um lado menor em comum. Portanto, o cubo construído por Guilherme está representado na alternativa (c).

Questão 16 - UFMA (Universidade Federal do Maranhão)

Uma pirâmide e um prisma de bases quadradas têm áreas de base e volume iguais. Se a altura da pirâmide é de 6 cm e a medida do lado da base é 7 cm, determine a área total do prisma.

Solução

Se os volumes e as áreas das bases são iguais e a altura da pirâmide é de 6 cm, temos:

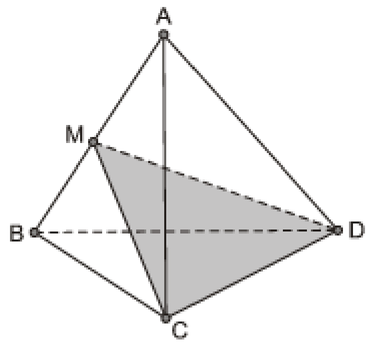
$$V_{prisma} = V_{pirâmide} \Rightarrow A_{base} \cdot h_{prisma} = \frac{A_{base} \cdot h_{pirâmide}}{3} \Rightarrow h_{prisma} = \frac{h_{pirâmide}}{3} \Rightarrow h_{prisma} = \frac{6}{3} \Rightarrow h_{prisma} = 2\,cm.$$

Assim, a área total do prisma é:

$$A_{total} = 4\,A_{lateral} + 2\,A_{base} \Rightarrow A_{total} = 4 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 7^2 \Rightarrow A_{total} = 105\,cm^2.$$

Questão 17 - UPF 2014 (Universidade de Passo Fundo)

As quatro faces do tetraedro ABCD são triângulos equiláteros. M é o ponto médio da aresta AB. O triângulo MCD formado é:



(a) escaleno
(b) retângulo
(c) equilátero
(d) obtusângulo
(e) estritamente isósceles

Solução

Veja que MC e MD são alturas dos triângulos ABC e ABD, respectivamente. Daí, é óbvio que MC = MD, donde segue que este triângulo não pode ser escaleno, o que elimina a alternativa (a). Por estar dentro do tetraedro, MCD não pode ser obtusângulo, o que elimina a alternativa (d).
Suponha agora que o lado do tetraedro seja l. É claro então que $MC = MD = \frac{l\sqrt{3}}{2}$. Pela Lei dos Cossenos aplicada em MCD, temos:

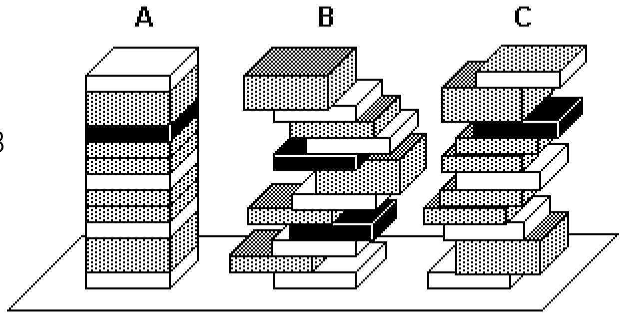
$$l^2=\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)^2-2\cdot\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\left(\frac{l\sqrt{3}}{2}\right)\cdot\cos C\widehat{M}D \Rightarrow l^2=\frac{3l^2}{4}+\frac{3l^2}{4}-\frac{3l^2}{2}\cdot\cos C\widehat{M}D \Rightarrow$$

$$\frac{-3l^2}{2}\cdot\cos C\widehat{M}D=\frac{-l^2}{2} \Rightarrow \cos C\widehat{M}D=\frac{1}{3}$$

Segue que $\cos 60º < \cos C\widehat{M}D < \cos 90º \Rightarrow 60º\, C\widehat{M}D < 90º$, e daí CMD não pode ser nem retângulo nem equilátero. Então, o triângulo é estritamente isósceles, sendo a alternativa (e) correta.

Questão 18 - UFSM 2001 (Universidade Federal de Santa Maria)

Três crianças estavam brincando na biblioteca da escola e resolveram fazer pilhas de mesma altura, com livros, conforme a figura. A mais organizada fez a pilha A, e as outras duas fizeram as pilhas B e C. Considerando-se que todos os livros têm a mesma área de capa e que as pilhas têm a mesma altura, pode-se afirmar que



(a) o volume da pilha A é maior do que o volume da pilha C.

(b) os volumes das pilhas B e C são iguais e maiores do que o volume da pilha A.

(c) o volume da pilha A é menor do que o volume da pilha B que é menor do que o volume da pilha C.

(d) os volumes das três pilhas são iguais.

(e) não existem dados suficientes no problema para decidir sobre os volumes e compará-los.

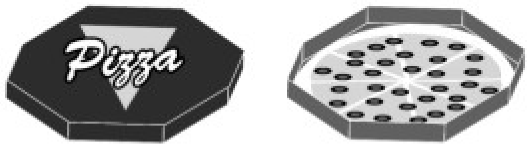
Solução

O Princípio de Cavalieri nos diz que dois sólidos com a mesma altura têm volumes iguais se as secções planas de iguais altura possuírem a mesma área. Analisando as pilhas A, B e C, é fácil perceber que as áreas de secções serão iguais. Logo, os volumes das três pilhas são os mesmos. Alternativa (d).

2.2 Nível Médio

Questão 1 – UERJ 2010 (Universidade Estadual do Rio de Janeiro)

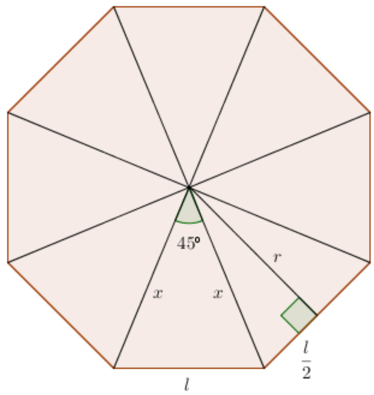
Uma embalagem em forma de prisma octogonal regular contém uma pizza circular que tangencia as faces do prisma.



Desprezando a espessura da pizza e do material usado na embalagem, a razão entre a medida do raio da pizza e a medida da aresta da base do prisma é igual a:

(a) $2\sqrt{2}$ (b) $\frac{3\sqrt{2}}{4}$ (c) $\frac{\sqrt{2}+1}{2}$ (d) $2(\sqrt{2}-1)$

Solução



Sendo l a medida do lado da caixa, podemos dividir a base octogonal em 8 triângulos isósceles de ângulo entre os lados iguais sendo 45°, como mostrado ao lado. Usando a Lei dos Cossenos, podemos descobrir a medida de l em função de x:

$$l^2=x^2+x^2-2\cdot x\cdot x\cdot cos45^o \Rightarrow l^2=2x^2-\sqrt{2}x^2 \Rightarrow l=x\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

Utilizando o Teorema de Pitágoras, descobrimos o valor de r:

$$r^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=x^2 \Rightarrow r^2=x^2-\frac{x^2(2-\sqrt{2})}{4} \Rightarrow r^2=\frac{x^2(2+\sqrt{2})}{4} \Rightarrow r=\frac{x\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

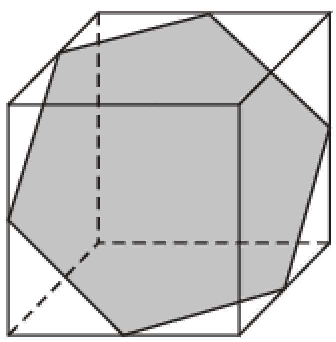
Então,

$$\frac{r}{l}=\frac{\frac{x\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}{x\sqrt{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{r}{l}=\frac{x\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2x\sqrt{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{r}{l}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \Rightarrow \frac{r}{l}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}}\cdot\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}\right) \Rightarrow \frac{r}{l}=\frac{\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})} \Rightarrow$$

$$\frac{r}{l}=\frac{\sqrt{2}}{2(2-\sqrt{2})}\cdot\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}\right) \Rightarrow \frac{r}{l}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2(4-2)} \Rightarrow \frac{r}{l}=\frac{2\sqrt{2}+2}{4} \Rightarrow \frac{r}{l}=\frac{\sqrt{2}+1}{2}.$$

A resposta é a alternativa (c).

Questão 2 – UFRGS 2014 (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)



Os vértices do hexágono sombreado, na figura ao lado, são pontos médios das arestas de um cubo. Se o volume do cubo é 216, o perímetro do hexágono é

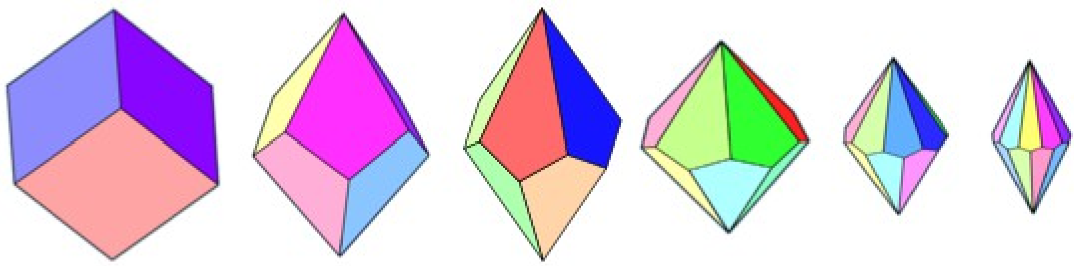
(a) $3\sqrt{2}$ (b) $6\sqrt{2}$ (c) $9\sqrt{2}$
(d) $12\sqrt{2}$ (e) $18\sqrt{2}$

Solução

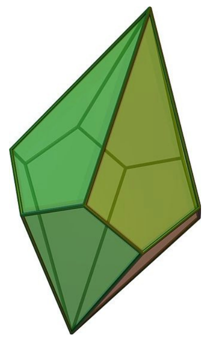
O lado do cubo será $\sqrt[3]{216}=6.$ Com auxílio do Teorema de Pitágoras, sendo l o lado do hexágono, temos: $l^2=3^2+3^2 \Rightarrow l=3\sqrt{2}.$
O perímetro do hexágono é $6(3\sqrt{2})=18\sqrt{2}.$ A resposta é a alternativa (e).

Questão 3

Um trapezoedro é um poliedro com faces em forma de deltoide. Seu formato é bastante similar a um balão de festa junina, como pode ser visto abaixo:



O tipo de trapezoedro depende da quantidade de deltoides que o formam. Em geral, se ele tem 2n deltoides ele é chamado de trapezoedro n-gonal. Por exemplo, O trapezoedro verde ao lado é chamado de pentagonal porque contém 10 deltoides.
Prove que todo trapezoedro é convexo.



Solução

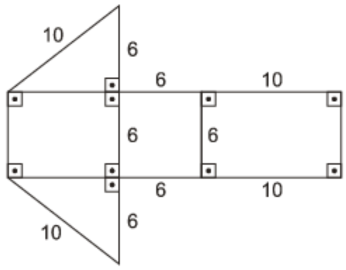
Todo poliedro convexo satisfaz o Teorema de Euler. Assim, basta verificá-lo nos trapezoedros. Seja um trapezoedro formado por n deltoides. Claramente, o número de faces será n.
Veja que cada deltoide é definida por 4 arestas. Então, são necessárias 4n arestas. Mas cada aresta está presente em duas faces, donde segue que há $\frac{4\text{n}}{2}=2\text{n}$ arestas.
Com relação aos vértices, cada deltoide tem 4 vértices, donde são necessários 4n vértices. Mas em cada deltoide há 3 vértices que se ligam a 3 deltoides, donde segue que sobram 4n – 3n = n vértices. Além desses, há os dois vértices nas extremidades que pertencem a $\frac{n}{2}$ deltoides.
Então, um trapezoedro tem n + 2 vértices no total.
Utilizando a Relação de Euler, temos:

$$V-A+F=2 \Rightarrow (n+2)-(2\text{n})+(n)=2 \Rightarrow n-2\text{n}+n+2=2 \Rightarrow 2\text{n}-2\text{n}+2=2 \Rightarrow 2=2.$$

Assim, todos os trapezoedros são convexos.

Questão 4 – UFRGS 2014 (Universidade Federal do Rio Grande do Sul)

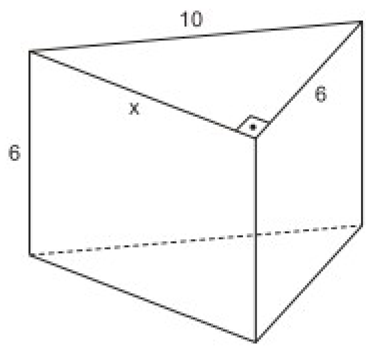
Na figura abaixo, encontra-se representada a planificação de um sólido de base quadrada cujas medidas estão indicadas.



O volume desse sólido é:

(a) 144 **(b)** 180 **(c)** 216 **(d)** 288 **(e)** 360

Solução



O sólido formado será um prisma de base triangular.
Determinando o valor de x pelo Teorema de Pitágoras, temos:

$$x^2+6^2=10^2 \Rightarrow x^2=10^2-6^2 \Rightarrow x^2=64 \Rightarrow x=8\,cm.$$

Portanto, o volume V do sólido será dado por:

$V=A_{base}\cdot h \Rightarrow V=\dfrac{8\cdot 6}{2}\cdot 6 \Rightarrow V=144.$ A alternativa correta é a (a).

Questão 5 – UFG 2013 (Universidade Federal de Goiás)

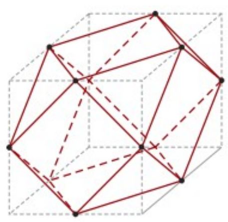
Um joalheiro produzirá um ornamento para um pingente a partir de uma pedra precisa, originalmente em forma de um cubo. Para isso, ele retirará de cada vértice do cubo um tetraedro cujos vértices são os vértices do cubo e os pontos médios das arestas que concorrem nesse vértice. Os tetraedros serão descartados. Considerando-se as condições apresentadas, calcule:

(a) O número de faces do poliedro que constitui o ornamento.

(b) A fração do volume do cubo original que constitui cada tetraedro retirado.

Solução

(a) O número de faces do ornamento é 14, sendo 6 contidas nas faces do cubo original e mais 8 que apareceram nos 8 cortes para a retirada dos tetraedros, conforme a figura ao lado.



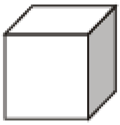
(b) Sendo a a medida da aresta do cubo, por ser uma pirâmide, seu volume será

$$V_{tetraedro}=\frac{\frac{(\frac{a}{2})\cdot(\frac{a}{2})}{2}\cdot(\frac{a}{2})}{3}\Rightarrow V_{tetraedro}=\frac{a^3}{48}$$

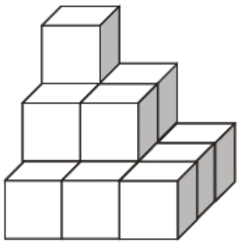
Como o volume do cubo é a^3, a razão pedida é $\frac{V_{tetraedro}}{V_{cubo}}=\frac{\frac{a^3}{48}}{a^3}\Rightarrow\frac{V_{tetraedro}}{V_{cubo}}=\frac{1}{48}$.

Questão 6 – UPE 2013 (Universidade de Pernambuco)

Para pintar completamente o cubo representado abaixo, são necessários 300 mililitros de tinta.



Mantendo o mesmo rendimento de pintura, quantos litros seriam necessários para pintar completamente a peça representada abaixo, formada por 14 cubos, sabendo-se que não há cubos escondidos?



(a) 0,7 litro
(b) 1,9 litros
(c) 2,1 litros
(d) 3,0 litros
(e) 4,2 litros

Solução

Para pintar cada face foram necessários $\frac{300}{6}=50$ mililitros. Pela figura, há 14 cubos totalizando 42 faces quadradas para serem pintadas. Assim, para pintar a peça inteira serão necessários $42\cdot 50=2100=2{,}1$ litros de tinta, alternativa (c).

Questão 7 – UNEB 2014 (Universidade do Estado da Bahia)

"A pele é o maior órgão de seu corpo, com uma superfície de até 2 m². Ela tem duas camadas principais: a epiderme, externa, e a derme, interna. "

(BREWER. 2013, p. 72).

De acordo com o texto, a superfície máxima coberta pela pele humana é equivalente a de um cubo cuja diagonal, em m, é igual a

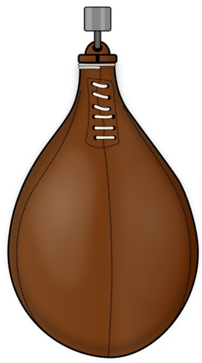
(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (d) $\sqrt{3}$ (e) 1

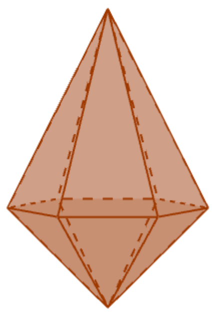
Solução

A área total de um cubo é $A_{total}=6a^2$,onde a é a medida da aresta do cubo. Então: $A_{total}=2\Rightarrow 6a^2=2\Rightarrow a^2=\frac{1}{3}\Rightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{3}$. A diagonal do cubo é dada por $d=a\sqrt{3}$. Assim, $d=\frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\sqrt{3}\Rightarrow d=\frac{(\sqrt{3})^2}{3}\Rightarrow d=\frac{3}{3}\Rightarrow d=1$. A resposta é a alternativa (e).

Questão 8

Punching Ball é o nome dado a um equipamento muito utilizado por boxeadores para treinamentos. Carlos pratica boxe e necessita de uma *punching ball* com modelo semelhante aos que estão exemplificados ao lado. Como ele irá fixá-la no teto d e sua garagem por meio de um suporte flexível, é necessário saber seu volume. Para isso, Carlos fez um esboço da *punching ball* utilizando duas pirâmides de base hexagonal regular, como mostrado abaixo, obtendo um sólido.





(a) Determine a quantidade de faces, vértices e arestas e diga um possível nome para este sólido.

(b) Sabendo que o apótema do hexágono que serve como base para as pirâmides é de $6\sqrt{3}$ cm, que a altura da pirâmide de cima é o dobro da altura da pirâmide de baixo e que a área superficial total dó sólido é de 1404 cm², determine o valor aproximado do volume da *punching ball* calculado por Carlos.

Solução

(a) Observando a figura, é possível perceber que o sólido tem 12 faces, 18 arestas e 8 vértices. O nome deste sólido é **bipirâmide hexagona**l, mas pode ser chamado de dodecaedro por conta da quantidade de faces ou ainda dodecadeltaedro, apesar dessa terminologia estar em desuso para evitar confusão com outros tipos de dodecaedros.
(b) Observe que os triângulos que compões as duas pirâmides são isósceles. Daí, sendo l a medida do lado do hexágono que serve como base para ambas, a área superficial total da bipirâmide hexagonal será

$$A_{sólido}=6A_{triângulo1}+6A_{triângulo2}\Rightarrow A_{sólido}=6\left(\frac{l\cdot a_{pirâmide1}}{2}+\frac{l\cdot a_{pirâmide2}}{2}\right)\Rightarrow A_{sólido}=3l\left(a_{pirâmide1}+a_{pirâmide2}\right).$$

O apótema de um hexágono regular é dado por $a = \frac{l\sqrt{3}}{2}$, temos $\frac{l\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3} \Rightarrow l = 12.$

Agora, seja h a altura da pirâmide menor. Por consequência, a altura da pirâmide maior será 2h. Assim, podemos calcular o apótema da pirâmide maior pelo Teorema de Pitágoras:

$(2h)^2 + (a)^2 = (a_{pirâmide\,1})^2 \Rightarrow (a_{pirâmide\,1})^2 = 4h^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow a_{pirâmide\,1} = 2\sqrt{h^2+27}.$

Procedendo analogamente para a pirâmide menor, temos:

$(h)^2 + (a)^2 = (a_{pirâmide\,2})^2 \Rightarrow (a_{pirâmide\,2})^2 = h^2 + (6\sqrt{3})^2 \Rightarrow a_{pirâmide\,2} = \sqrt{h^2+108}.$ Então, temos que

$$A_{sólido} = 3\cdot 12\cdot(2\sqrt{h^2+27} + \sqrt{h^2+108}) \Rightarrow 1404 = 3\cdot 12\cdot(2\sqrt{h^2+27} + \sqrt{h^2+108}) \Rightarrow$$

$$2\sqrt{h^2+27} + \sqrt{h^2+108} = 39 \Rightarrow 2\sqrt{h^2+27} = 39 - \sqrt{h^2+108} \Rightarrow (2\sqrt{h^2+27})^2 = (39 - \sqrt{h^2+108})^2 \Rightarrow$$

$$4h^2 + 108 = 39^2 - 2\cdot 39\cdot\sqrt{h^2+108} + h^2 + 108 \Rightarrow \frac{3h^2 - 39^2}{-2\cdot 39} = \sqrt{h^2+108} \Rightarrow \left(\frac{3h^2-39^2}{-2\cdot 39}\right)^2 = (\sqrt{h^2+108})^2 \Rightarrow$$

$$\frac{9h^4 - 6\cdot 39^2 h^2 + 39^4}{6084} = h^2 + 108 \Rightarrow h^4 - 1690h^2 + 184041 = 0 \Rightarrow h_1 = 3\sqrt{13},\ h_2 = 11\sqrt{13}\,(\textit{não serve}),$$

$$h_3 = -3\sqrt{13}\,(\textit{não serve})\ e\ h_4 = -11\sqrt{13}\,(\textit{não serve}).$$

Portanto, $h = 3\sqrt{13}.$ O volume do sólido é dado pela soma dos volumes das duas pirâmides. Assim:

$$V_{sólido} = V_{pirâmide\,1} + V_{pirâmide\,2} \Rightarrow V_{sólido} = \frac{\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}\cdot 2h}{3} + \frac{\frac{3l^2\sqrt{3}}{2}\cdot h}{3} \Rightarrow V_{sólido} = \frac{\frac{3\cdot 12^2\sqrt{3}}{2}\cdot 2\cdot(3\sqrt{13})}{3} + \frac{\frac{3\,12^2\sqrt{3}}{2}\cdot(3\sqrt{13})}{3} \Rightarrow$$

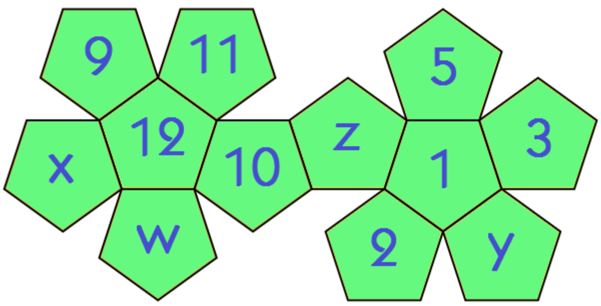
$$V_{Sólido} = 144\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{13} + 72\sqrt{3}\cdot 3\sqrt{13} \Rightarrow V_{sólido} = 648\sqrt{39}\,cm^3.$$

Questão 9

Dados com formatos de poliedros, como os mostrados abaixo, são utilizados nos mais diversos tipos de jogos de tabuleiro.

(a) Determine o número de faces, vértices e arestas de cada poliedro representado acima.

(b) Tem-se abaixo a planificação de um dado dodecaédrico com os números de 1 a 12 em suas respectivas faces. Por um defeito na fabricação do mesmo, algumas faces ficaram sem seus números, representados abaixo pelas letras x, y, z e w. Sabendo que a soma dos números de faces opostas é sempre igual, determine os valores de x, y, z e w.



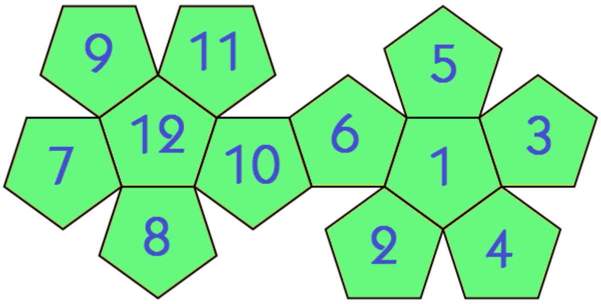
(c) Supondo que tenhamos um dado tetraédrico com os números de 1 a 4 em cada face, um dado normal com números de 1 a 6, um dado octaédrico com números de 1 a 8, um dado dodecaédrico com números de 1 a 12 e um dado icosaédrico com números de 1 a 20, se sortearmos um número de cada dado, nessa ordem, qual a probabilidade deles formarem uma progressão aritmética?

Solução

(a) A tabela abaixo mostra a quantidade de faces, vértices e arestas dos poliedros representados:

		Arestas	Faces	Vértices
Poliedro Amarelo	Octaedro	12	8	6
Poliedro Vermelho	Icosaedro	30	20	12
Poliedro Azul	Dodecaedro	30	12	20
Poliedro Laranja	Tetraedro	6	4	4
Poliedro Verde	Trapezoedro	20	10	12

(b) Analisando a planificação vemos que 4, 6, 7 e 8 são os números que faltam. Como a soma das faces opostas são sempre iguais, devemos ter de acordo com a planificação que $9 + y = 12 + 1 = x + z = 11 + 2 = 5 + w = 3 + 10$. Daí, segue que $y = 4$, $w = 8$, $x = 7$ e $z = 6$. A planificação com todos os números fica assim:



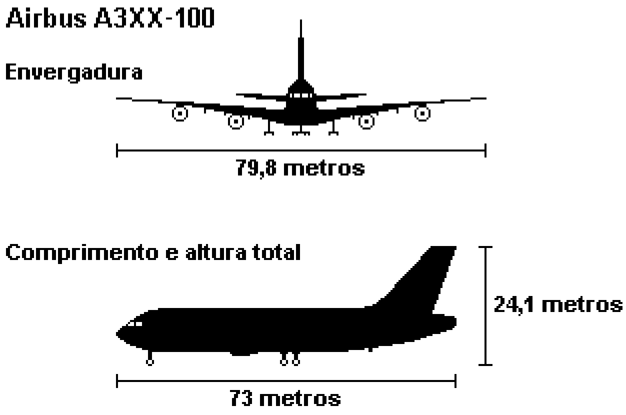
(c) Os valores possíveis que podem formar uma progressão aritmética para cada dado são:

Número sorteado				
Tetraedro	Cubo	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
1	1	1	1	1
1	2	3	4	5
1	3	5	7	11
1	4	7	10	13
2	2	2	2	2
2	3	4	5	6
2	4	6	8	10
2	5	8	11	14
3	3	3	3	3
3	4	5	6	7
3	5	7	9	11
4	4	4	4	4
4	5	6	7	8
4	6	8	10	12

Temos no total 14 possíveis combinações dentre as $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 20 = 46080$. Assim, a probabilidade pedida é $\dfrac{14}{46080} = \dfrac{7}{23040}$.

Questão 10 – UERJ 2001 (Universidade Estadual do Rio de Janeiro)

Na construção de um hangar, com a forma de um paralelepípedo retângulo, que possa abrigar um "Airbus", foram consideradas as medidas apresentadas abaixo.



(Adaptado de "Veja", 14/06/2000.)

Calcule o volume mínimo desse hangar.

Solução

O volume de um paralelepípedo retângulo é definido pelo produto de suas dimensões. Assim:
$V_{hangar} = 79{,}8 \cdot 73 \cdot 24{,}1 \Rightarrow V_{hangar} = 140392{,}14\ m^3$.

Questão 11

Seja um prisma regular de base hexagonal com lados de medida l e altura de medida h. Sabendo que o volume do prisma é $24\sqrt{18}$, determine todos os valores inteiros de l tais que existe uma constante k de modo que $A_{lateral} = k \cdot A_{base}$ e $k > l$.

Solução

Utilizando a fórmula que nos fornece o volume de um prisma, temos:

$$V_{prisma} = A_{base} \cdot h \Rightarrow 24\sqrt{18} = \frac{3l^2\sqrt{3}}{2} \cdot h \Rightarrow l^2h = \frac{48\sqrt{18}}{3\sqrt{3}} \Rightarrow hl = \frac{16\sqrt{6}}{l}.$$ Assim,:

$$A_{lateral} = k \cdot A_{base} \Rightarrow 6lh = \frac{k \cdot 3l^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 6 \cdot \left(\frac{16\sqrt{6}}{l}\right) = \frac{k \cdot 3l^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{96\sqrt{6}}{l} = \frac{k \cdot 3l^2\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 192\sqrt{6} = 3\mathrm{k}l^3\sqrt{3} \Rightarrow$$

$$k\,l^3 = 64\sqrt{2} \Rightarrow l = \sqrt[3]{\frac{64\sqrt{2}}{k}}$$

Para l ser inteiro, k dever ser na forma $q\sqrt{2}$, com q inteiro. Então, temos $l = \sqrt[3]{\frac{64}{q}} \Rightarrow l = \frac{4}{\sqrt[3]{q}}$.

Se $\sqrt[3]{q}$ divide 4, temos que q = 1, 8 e 64, donde obtemos l =1, 2 e 4. Mas para $k > l$, devemos ter $q\sqrt{2} > l$, e tal condição só é satisfeita para l = 1 e l = 2.
Segue que os possíveis valores de l são 1 e 2.

Questão 12

A raiz quadrada da razão entre as quantidades de diagonais espaciais de um icosaedro e um dodecaedro, sendo estes Sólidos Platônicos, pode ser expressa na forma $\frac{a}{b}$, com ***a*** e ***b*** inteiros. Determine ***a + b.***

Solução

Inicialmente, perceba que uma diagonal precisa de dois vértices para ser formada. Assim, basta escolher 2 entre os V vértices do poliedro, donde segue que há $\binom{V}{2}$. Mas as diagonais espaciais são entre vértices de faces distintas e elas não podem coincidir com as arestas. Então, devemos desconsiderar as A arestas e todas as diagonais das faces. Segue que a quantidade de diagonais espaciais de um poliedro convexo é dada por

$$D=\binom{V}{2}-A-\sum d$$

Sendo V o número de vértices, A o número de arestas de $\sum d$ a soma das diagonais das faces do poliedro. Vamos agora calcular o número de diagonais espaciais de cada poliedro.

Um dodecaedro regular é formado por 12 faces pentagonais, tendo 20 vértices e 30 arestas. Lembrando que a quantidade de diagonais de um polígono de n lados é dada por $\frac{n(n-3)}{2}$, temos:

$$D_{dodecaedro}=\binom{20}{2}-30-12\left(\frac{5(5-3)}{2}\right)\Rightarrow D_{dodecaedro}=190-30-60\Rightarrow D_{dodecaedro}=100$$

O icosaedro regular é formado por 20 faces triangulares, tendo 12 vértices e 30 arestas. De forma análoga ao anterior, temos:

$$D_{icosaedro}=\binom{12}{2}-30-12\left(\frac{3(3-3)}{2}\right)\Rightarrow D_{icosaedro}=66-30-0\Rightarrow D_{icosaedro}=36$$

Daí, temos:

$\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{D_{icosaedro}}{D_{dodecaedro}}}\Rightarrow\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{36}{100}}\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{3}{5}\Leftrightarrow a=3, b=5.$ E finalmente concluímos que ***a + b = 8.***

2.3 Nível Difícil

Questão 1 – OCM 2000 (Olimpíada Cearense de Matemática)

Se um poliedro convexo tem 6 vértices e 12 arestas, prove que toda face é um triângulo.

Solução

Sejam V, A e F respectivamente o número de vértices, arestas e faces do poliedro. O teorema de Euler nos dá $V-A+F=2,$ e daí $F=A-V+2 \Rightarrow F=12-6+2 \Rightarrow F=8.$
Sendo F_k o número de faces com k arestas, temos $F=F_3+F_4+F_5+\ldots$ e queremos provar que $F=F_3,$ ou seja, que $F_4+F_5+\ldots=0.$ Para isso note que, como cada aresta pertence a exatamente duas faces, tem-se $3F_3+4F_4+5F_5+\ldots=2A=24.$ Mas isso implica $24=3F \leqslant 3(F_3+F_4+F_5+\ldots) \leqslant 3F_3+4F_4+5F_5+\ldots=2A=24,$ de modo que todas as desigualdades acima devem ser igualdades. Em particular, $F_3+F_4+F_5+\ldots=3F_3+4F_4+5F_5+\ldots,$
3¿
ou seja, $F_4+2F_5+3F_6+\ldots=0.$ Como $F_k \geq 0$ para todo k, segue que $F_k=0$ para $k>3.$

Observação: Um pouco mais de trabalho nos permite concluir que um poliedro satisfazendo as condições do enunciado é necessariamente um octaedro. Por exemplo, se denotarmos por V_k o número de vértices do poliedro no qual incidem k arestas temos (analogamente ao feito acima): $V_3+V_4+V_5+\ldots=V=6$ e $3V_3+4V_4+5V_5+\ldots=2A=24.$
Essas equações permitem concluir que $V=V_4,$ e a partir daí concluir que o poliedro em questão é um octaedro é quase imediato.

Questão 2 – ITA 2014 (Instituto Tecnológico de Aeronáutica)

Uma pirâmide de altura h = 1 cm e volume V = 50 cm³ tem como base um polígono convexo de n lados. A partir de um dos vértices do polígono traçam-se n – 3 diagonais que o decompõem em n – 2 triângulos cujas áreas $S_i, i=1,2,\ldots n-2,$ constituem uma progressão aritmética na qual $S_3=\frac{3}{2}cm^2$ e $S_6=3\,cm^2.$ Então n é igual a:

(a) 20 **(b)** 22 **(c)** 24 **(d)** 26 **(e)** 28

Solução

Utilizando a fórmula do volume da pirâmide, podemos descobrir sua área da base:
$V_{pirâmide}=\frac{A_{base}\cdot h}{3} \Rightarrow 50=\frac{A_{base}\cdot 1}{3} \Rightarrow A_{base}=150\,cm^2.$ Daí, é imediato que $S_1+S_2+S_3+\ldots+S_{n-2}=150.$
Na PA em questão, $S_6=S_3+3r,$ sendo r a razão da progressão aritmética. Então,

$3=\frac{3}{2}+3r\Rightarrow 6=3+6r\Rightarrow r=\frac{6-3}{6}\Rightarrow r=\frac{1}{2}$. Portanto, $S_1=S_3-2r\Rightarrow S_1=\frac{1}{2}$. Como $S_{n-2}=S_1+(n-3)r\Rightarrow S_{n-2}=\frac{n-2}{2}$, segue da fórmula da soma dos termos da PA que

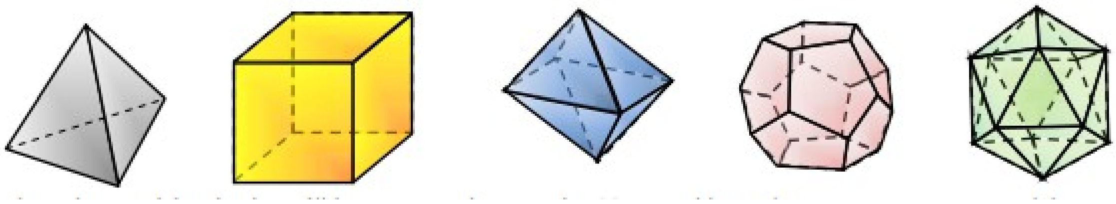
$$S=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\Rightarrow A_{base}=\frac{(n-2)(S_1+S_{n-2})}{2}\Rightarrow 150=\frac{(n-2)(\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2})}{2}\Rightarrow 300=(n-2)\frac{n-1}{2}\Rightarrow$$

$n^2-3n-598=0\Rightarrow n_1=26\, e\, n_2=-23\,(não\, serve)$.

Assim, segue que a base da pirâmide é icosihexadecaédrica e $n=26$. Alternativa (d).

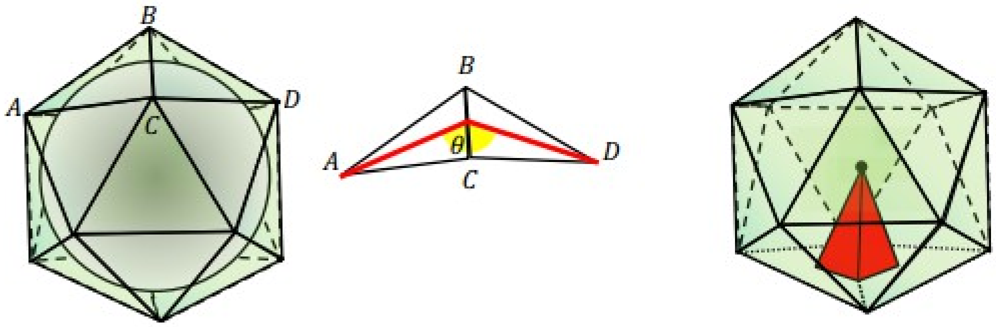
Questão 3 – OPM 2013 (Olimpíada Paulista de Matemática) (Adaptado)

Os sólidos de Platão têm faces com mesmas quantidades de arestas e, além disso, de cada vértice sai a mesma quantidade de arestas. Se todas as arestas têm a mesma medida, o sólido de Platão é regular. Pode-se provar que há cinco sólidos de Platão: o tetraedro, o hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.



Você já deve conhecer bem os dois primeiros sólidos, e quem sabe o terceiro. Nesse problema, daremos uma atenção especial ao icosaedro.

Nesta questão, calcularemos o raio da esfera inscrita no icosaedro regular, que é o sólido de Platão com 20 faces triangulares.



(a) Sendo θ o ângulo diédrico entre as faces ABC e BCD do icosaedro regular, calcule cos θ.

(b) Considere o quadrilátero destacado na figura da direita, que tem como vértices o centro do icosaedro, dois centros de faces adjacentes e o ponto médio de uma das arestas. Sendo ℓ a medida da aresta do icosaedro, calcule o raio da esfera inscrita no icosaedro.

Você pode querer utilizar os seguintes dados:

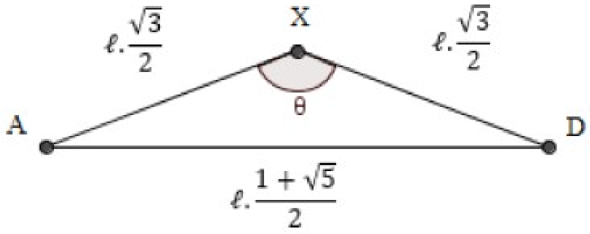
☻ A diagonal de um pentágono regular de lado x é $x\cdot(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

☻ $tg(\frac{\theta}{2})=\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta+1}}$.

Solução

(a) Seja ℓ a medida da aresta do icosaedro. Note que o triângulo formando ângulo θ possui dois lados que são alturas de triângulos equiláteros de duas faces e o terceiro lado sendo a diagonal de um pentágono regular. Sabe-se que a altura do triângulo equilátero é $\frac{\ell\sqrt{3}}{2}$ e, como dado na dica, a diagonal do pentágono é $\ell\cdot(\frac{1+\sqrt{5}}{2})$.

.

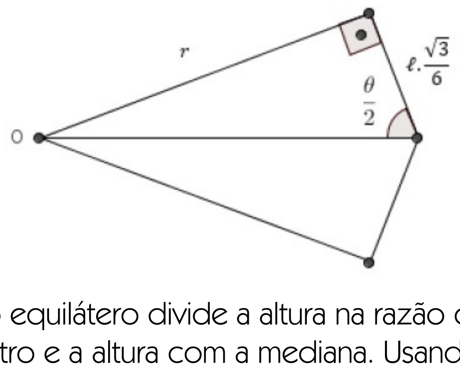


Usando a Lei dos Cossenos, temos:

$$AD^2=AX^2+XD^2-2\cdot AX\cdot XD\cdot\cos\theta\Rightarrow(\ell(\frac{\sqrt{5}+1}{2}))^2=(\frac{\ell\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{\ell\sqrt{3}}{2})^2-2\cdot(\frac{\ell\sqrt{3}}{2})\cdot(\frac{\ell\sqrt{3}}{2})\cdot\cos\theta\Rightarrow$$

$$\frac{6+2\sqrt{5}}{4}=\frac{6-6\cos\theta}{4}\Rightarrow\cos\theta=\frac{-\sqrt{5}}{3}.$$

(b) Observando o quadrilátero formado por dois centros de faces, o centro da circunferência inscrita e o ponto onde forma-se o ângulo θ entre as duas faces, temos a figura a seguir. Note que os dois triângulos são congruentes, pois possuem os três lados iguais. Portanto, o ângulo θ será dividido em dois ângulos iguais.



Note que o centro do triângulo equilátero divide a altura na razão de 2:1, pois nesse caso o centro coincide com o baricentro e a altura com a mediana. Usando a dica, temos:

$$tg(\frac{\theta}{2})=\frac{r}{\ell\cdot(\frac{\sqrt{3}}{6})}\Rightarrow r=\ell\cdot(\frac{\sqrt{3}}{6})\cdot\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta+1}}\Rightarrow\Rightarrow r=\ell\cdot(\frac{\sqrt{3}}{6})\cdot\sqrt{\frac{1-(\frac{-\sqrt{5}}{3})}{(\frac{-\sqrt{5}}{3})+1}}$$

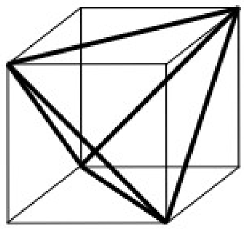
Note que

$$\sqrt{\frac{1-(\frac{-\sqrt{5}}{3})}{(\frac{-\sqrt{5}}{3})+1}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}\cdot(\frac{3+\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}})}=\sqrt{\frac{(3+\sqrt{5})^2}{4}}=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

Dessa forma, chegamos a $r=\ell\cdot(\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12})$.

Questão 4 – OCAXM 2002 (Olimpíada Capixaba de Matemática 2002)

A partir da figura abaixo calcule o volume de um tetraedro de aresta a.



Solução

A aresta do cubo mede $b=\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Basta observar que o cubo fica dividido em 5 sólidos: um tetraedro e 4 pirâmides de base triangular de área igual a $\frac{b^2}{2}$ e altura b. Logo o volume do tetraedro de aresta a é igual a

$$V_{tetraedro}=b^3-4\cdot(\frac{b^2}{2})\cdot(\frac{b}{3})\Rightarrow V_{tetraedro}=\frac{b^3}{3}\Rightarrow V_{tetraedro}=\frac{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^3}{3}\Rightarrow V_{tetraedro}=\frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Questão 5 – OBM 1992 (Olimpíada Brasileira de Matemática 1992)

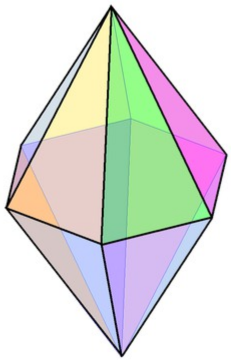
Um dado é um sólido com a forma de um poliedro convexo com um número impresso em cada face de tal forma que se forem apagados todos os números as faces se tornam i distinguíveis. Diga para quais valores de n é possível construir um dado de n faces com a propriedade de que para cada face há sempre uma outra face paralela.

Solução

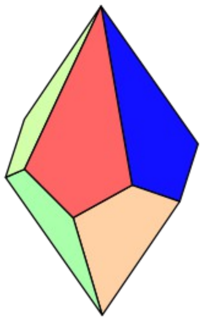
Como para cada face há uma outra face paralela, n deve ser par e claramente $n\geq 4$. O único poliedro convexo com 4 faces é o tetraedro (regular ou não) que não admite pares de faces paralelas; assim, $n\geq 6$, com n par.

Observação: É possível mostrar explicitamente como construir um dado com n faces para qualquer n par, $n \geq 6$. Vamos dividir a construção em dois casos: n múltiplo de *4* e n da forma $4k+2$.

Para $n=4k$, construímos a bipirâmide colando pelas bases duas pirâmides iguais com base um polígono regular de *2k* lados. Note que o octaedro regular é uma bipirâmide para *n = 8;* veja na figura abaixo um exemplo de bipirâmide para *n = 12*:



Para $n=4k+2$, construímos a bipirâmide torcida, mais conhecida como trapezoedro. Tomamos inicialmente duas pirâmides iguais com base um polígono regular de $2k+1$ lados. Colamos as duas bases com um encaixe imperfeito, de tal forma que as duas bases formem uma estrela de $4k+2$ pontas, com os vértices coincidindo com os de um polígono regular. As faces das duas pirâmides são os planos suporte para as faces do nosso poliedro: precisamos apenas prolongar e cortar as faces. As novas faces serão quadriláteros com lados vizinhos iguais dois a dois, também chamados de deltoides. Note que o cubo é um trapezoedro para *n = 6*; veja na figura um trapezoedro para *n = 10.*



Observe que não estamos afirmando que estes sejam os únicos dados; tal afirmação é falsa, pois o dodecaedro e o icosaedro regulares são dados mas não são bipirâmides ou trapezoedros.

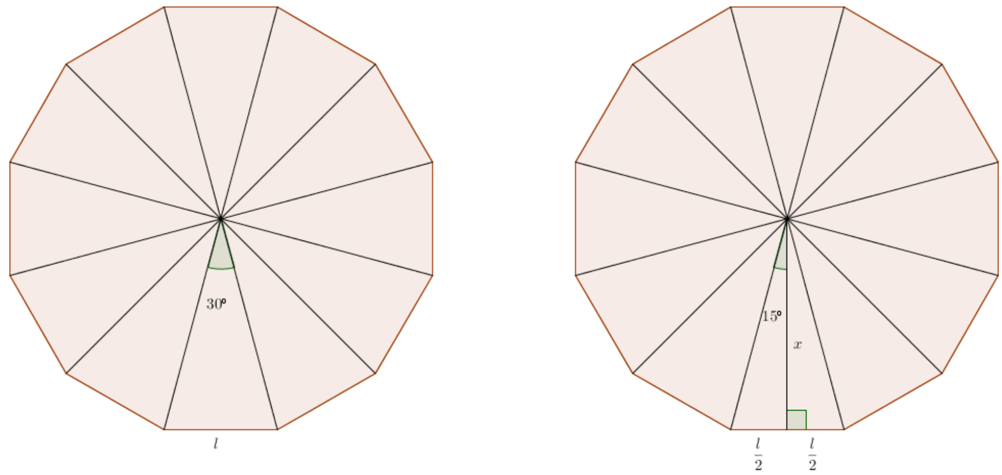
Questão 6

Se a altura de uma pirâmide regular de base dodecagonal for duplicada e o lado de sua base reduzido à metade, qual a diminuição percentual no volume da pirâmide?

Solução

O volume de uma pirâmide de base dodecagonal de altura h é $V=\frac{A_{base} \cdot h}{3}$. Vamos definir a área da base. Divida o dodecágono em 12 triângulos isósceles, sendo l a medida do lado. Veja que o ângulo oposto a l medirá 30º. Traçando a altura x, obteremos um triângulo retângulo de lado

$\frac{l}{2}$ com ângulo oposto de 15°, como mostrado abaixo.



Utilizando relações trigonométricas, temos $tg\,15^o = \frac{\frac{l}{2}}{x} \Rightarrow tg\,15^o = \frac{l}{2x}$. Sabemos que $tg\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta+1}}$. Sabendo que $\cos 30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$ temos

$$tg\,15^o = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}} \Rightarrow tg\,15^o = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}} \Rightarrow tg\,15^o = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+2}} \Rightarrow tg\,15^o = \sqrt{7-4\sqrt{3}} \Rightarrow tg\,15^o = 2-\sqrt{3}.$$

Daí, podemos dizer que $2-\sqrt{3} = \frac{l}{2x} \Rightarrow (4-2\sqrt{3})x = l \Rightarrow x = \frac{l}{4-2\sqrt{3}} \Rightarrow x = \frac{2+\sqrt{3}}{2} l.$

A área de cada triângulo será então $A_{triângulo} = \frac{l \cdot x}{2} \Rightarrow A_{triângulo} = \frac{l \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2} \cdot l}{2} \Rightarrow A_{triângulo} = l^2 \cdot \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right).$

A área total do dodecágono é

$$A_{dodecágono} = 12\,A_{triângulo} \Rightarrow A_{dodecágon.o} = 12\,l^2 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_{dodecágono} = l^2 \cdot (6+3\sqrt{3})$$

Assim, o volume da pirâmide será $V = \frac{l^2 \cdot (6+3\sqrt{3}) \cdot h}{3} \Rightarrow V = (2+\sqrt{3}) \cdot l^2 \cdot h.$

O novo volume V' da pirâmide será

$$V' = (2+\sqrt{3}) \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot 2h \Rightarrow V' = \frac{(2+\sqrt{3}) \cdot l^2 \cdot 2h}{4} \Rightarrow V' = \frac{(2+\sqrt{3}) \cdot l^2 \cdot h}{2}.$$

A diminuição percentual será de 50%

Questão 7 – OBM 1990 (Olimpíada Brasileira de Matemática)

Dado um poliedro convexo com um número ímpar de faces, mostre que existe pelo menos uma face com um número par de lados.

Solução

Supondo que todas as faces tivessem um número ímpar de lados, então a soma dos números de lados das faces seria ímpar, pois o total de faces é ímpar. Mas essa soma é igual a 2A, onde A é o número de arestas do poliedro. Contradição.
Logo, existe no poliedro uma face com um número par de lados.

Questão 8 – UFPel (Universidade Federal de Pelotas)

No país do México, há mais de mil anos, o povo Asteca resolveu o problema da armazenagem da pós-colheita de grãos com um tipo de silo em forma de uma bola colocado sobre uma base circular de alvenaria. A forma desse silo é obtida juntando 20 placas hexagonais e mais 12 placas pentagonais.

Com base no texto, é correto afirmar que esse silo tem:

(a) 90 arestas e 60 vértices.
(b) 86 arestas e 56 vértices.
(c) 90 arestas e 56 vértices.
(d) 86 arestas e 60 vértices.
(e) 110 arestas e 60 vértices.

Solução

Podemos perceber que este poliedro tem 20 + 12 = 32 faces. O total de arestas ser

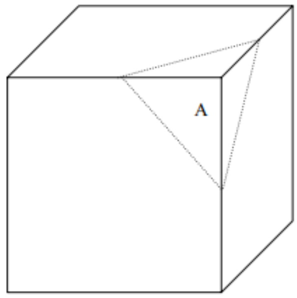
$$A=\frac{20\cdot 6+12\cdot 5}{2}\Rightarrow A=90$$

Utilizando a Relação de Euler, vem $V-A+F=2\Rightarrow V-90+32=2\Rightarrow V=60.$
Portanto, o silo tem 90 arestas e 60 vértices, alternativa (a).

Observação: o sólido retratado é um icosaedro truncado e é mais conhecido por ter um formato semelhante ao da bola de futebol clássica.

Questão 9 - IME 2008 (Instituto Militar de Engenharia)

Um plano corta um cubo com aresta de comprimento 1 passando pelo ponto médio de três arestas concorrentes no vértice A e formando uma pirâmide, conforme a figura a seguir. Este processo é repetido para todos os vértices. As pirâmides obtidas são agrupadas formando um octaedro cuja área da superfície externa é igual a:



(a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (b) $\sqrt{3}$ (c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ (d) 2 (e) 1

Solução

Cada face do octaedro obtido será equivalente a secção formada, que é um triângulo equilátero. Observe que cada lado **ℓ** desse triângulo equilátero forma um triângulo retângulo com os lados do cubo. Utilizando o Teorema de Pitágoras:

$$\ell^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow \ell^2=2\left(\frac{1}{4}\right)\Rightarrow \ell^2=\frac{1}{2}\Rightarrow \ell=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \ell=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

A área de cada face do octaedro será equivalente a área de cada um dos triângulos equiláteros de lado **ℓ** = 1. Como o octaedro tem 8 faces, sua área superficial será

$$A_{superfície}=8\cdot A_{triânguloequilátero}\Rightarrow A_{superfície}=8\cdot\left(\frac{\ell^2\sqrt{3}}{4}\right)\Rightarrow A_{superfície}=2\left(\ell^2\sqrt{3}\right)\Rightarrow A_{superfície}=2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\sqrt{3}\Rightarrow$$
$$A_{superfície}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{3}\Rightarrow A_{superfície}=\sqrt{3}.$$

Portanto, a área superficial externa do octaedro será $\sqrt{3}$. Alternativa (b).

Gabarito Simplificado

☻ Nível Fácil

Questão 1 – 3 vezes
Questão 2 – (d)
Questão 3 – (e)
Questão 4 - (e)
Questão 5 – (d)
Questão 6 – (a) Douglas; (b) 9 arestas e 6 vértices.
Questão 7 – (c)
Questão 8 – 336 dm^3
Questão 9 – (b)
Questão 10 - (b)
Questão 11 – (a)
Questão 12 - (d)
Questão 13 – (d)
Questão 14 - (b)
Questão 15 – (c)
Questão 16 – 105 cm^2
Questão 17 – (e)
Questão 18 - (d)

☻ Nível Médio

Questão 1 – (c)
Questão 2 – (e)
Questão 3 – Demonstração (ver página 34)
Questão 4 - (a)
Questão 5 – (a) 14 faces; (b) $\frac{1}{48}$.
Questão 6 – (c)
Questão 7 – (e)
Questão 8 – (a) 12 faces, 18 arestas e 8 vértices; bipirâmide hexagonal, dodecaedro ou dodecadeltaedro; (b) $648\sqrt{39}\,cm^3$.
Questão 9 – (a) Poliedro amarelo (octaedro): 12 arestas, 8 faces e 6 vértices; Poliedro vermelho (icosaedro): 30 arestas, 20 faces e 12 vértices; Poliedro azul (dodecaedro): 30 arestas, 12 faces e 20 vértices; Poliedro laranja (tetraedro): 6 arestas, 4 faces e 4 vértices; Poliedro verde (trapezoedro): 20 arestas, 10 faces e 12 vértices; (b) $x=7, y=4, z=6 \; e \; w=8$; (c) $\frac{7}{23040}$.
Questão 10 - 140392,14 m^3.
Questão 11 – $\ell = 1$ ou $\ell = 2$.
Questão 12 – 8

☻ Nível Difícil

Questão 1 – Demonstração (ver página 42)
Questão 2 – (d)
Questão 3 – (a) $\cos\theta = \frac{-\sqrt{5}}{3}$; (b) $r = \ell \cdot \left(\frac{\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}\right)$.
Questão 4 - $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$.
Questão 5 – $n \geq 6$, com *n* par.
Questão 6 – 50%
Questão 7 – Demonstração (ver página 48)
Questão 8 – (a)
Questão 9 – (b)